

Математический анализ

Модуль 4. Функции нескольких переменных

Лекция 4.1

Аннотация

Понятие функции нескольких переменных. Предел и непрерывность.
Частные производные первого порядка. Дифференцируемость.

1 Функция нескольких переменных

Определение

Множество всевозможных упорядоченных последовательностей n действительных чисел (x_1, x_2, \dots, x_n) называется **n -мерным точечным арифметическим пространством R^n** .

Определение

Элементы множества R^n называются **точками n -мерного пространства** и обозначаются: $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Определение

Число x_i называется **i -ой координатой** точки x .

Расстояние между двумя точками $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ определяется по формуле:

$$\rho(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}$$

Определение

Пусть задано множество $E \subset R^n$. Если каждой точке $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in E$ поставлено в соответствие число $u \in R$, то на множестве E задана **функция n переменных** $u = f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Переменные x_1, x_2, \dots, x_n называются независимыми переменными, u - зависимой, а множество E - областью определения функции f .

Определение

Множество точек (x_1, x_2, \dots, x_n) , удовлетворяющих уравнению

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = C,$$

где C - некоторая постоянная, называется **множеством уровня** функции $f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, соответствующим значению C .

Частные случаи:

При $n = 2$ множество уровня называется линией уровня.

При $n = 3$ множество уровня называется поверхностью уровня.

2 Предел и непрерывность

Пусть E - область определения функции $f(x)$.

Определение

Число b называется **пределом** функции $f(x)$ в точке a , если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0 \forall x \in E, 0 < \rho(x, a) < \delta(\varepsilon) : |f(x) - b| < \varepsilon.$$

Обозначение:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \text{ или } \lim_{\substack{x_1 \rightarrow a_1 \\ x_2 \rightarrow a_2 \\ \dots \\ x_n \rightarrow a_n}} f(x_1, x_2, \dots, x_n) = b.$$

В определении предела предполагается, что x стремится к a произвольным образом.

Определение

Функция $f(x)$ называется **непрерывной** в точке a , если

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

Определение

Функция $f(x)$ **непрерывна на множестве** $X \subset E$, если она непрерывна в каждой точке из множества X .

Свойства непрерывных функций:

1. Сумма, произведение, частное и суперпозиция непрерывных функций есть функция непрерывная.
2. Элементарные функции нескольких переменных непрерывны всюду, где они определены.

Определение

Функция $f(x)$ называется **бесконечно большой** при $x \rightarrow a$, если

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty.$$

Определение

Функция $f(x)$ называется **бесконечно малой** при $x \rightarrow a$, если

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0.$$

3 Частные производные 1-ого порядка

Рассмотрим функцию 2-х переменных $u = f(x_1, x_2)$, которая определена в некоторой ε -окрестности точки $a = (a_1, a_2)$.

Определение

Частной производной функции $f(x_1, x_2)$ в точке $a = (a_1, a_2)$ по переменной x_1 называется предел

$$\lim_{\Delta x_1 \rightarrow 0} \frac{f(a_1 + \Delta x_1, a_2) - f(a_1, a_2)}{\Delta x_1}.$$

Обозначение: $\frac{\partial f(a_1, a_2)}{\partial x_1}$, $f'_{x_1}(a_1, a_2)$, $f'_{x_1}(a)$.

Определение

Частной производной функции $f(x_1, x_2)$ в точке $a = (a_1, a_2)$ по переменной x_2 называется предел

$$\lim_{\Delta x_2 \rightarrow 0} \frac{f(a_1, a_2 + \Delta x_2) - f(a_1, a_2)}{\Delta x_2}.$$

Обозначение: $\frac{\partial f(a_1, a_2)}{\partial x_2}$, $f'_{x_2}(a_1, a_2)$, $f'_{x_2}(a)$.

Геометрическая интерпретация

Частная производная $\frac{\partial f(a_1, a_2)}{\partial x_1}$ – это тангенс угла наклона касательной к графику функции $f(x_1, x_2)$ в точке a , проведенной в направлении оси Ox_1 .

Аналогично: $\frac{\partial f(a_1, a_2)}{\partial x_2}$ – тангенс угла наклона касательной, проведенной в направлении оси Ox_2 .

Общий случай:

Рассмотрим функцию n переменных $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Определение

Частной производной функции $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ в точке $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ по переменной x_i называется предел

$$\lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \frac{f(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i + \Delta x_i, a_{i+1}, \dots, a_n) - f(a_1, \dots, a_i, \dots, a_n)}{\Delta x_i}.$$

Обозначение: $\frac{\partial f(a_1, a_2, \dots, a_n)}{\partial x_i}$, $f'_{x_i}(a_1, a_2, \dots, a_n)$, $f'_{x_i}(a)$. Данная частная производная также называется частной производной 1-ого порядка.

4 Дифференцируемость ФНП

Определение

Функция $u = f(x_1, \dots, x_n)$ называется **дифференцируемой** в точке $a = (a_1, \dots, a_n)$, если существуют числа A_1, \dots, A_n такие, что

$$\Delta u = A_1 \Delta x_1 + \dots + A_n \Delta x_n + o(\rho), \rho \rightarrow 0,$$

где $\rho = \sqrt{\Delta x_1^2 + \dots + \Delta x_n^2}$ и $\Delta u = f(a_1 + \Delta x_1, \dots, a_n + \Delta x_n) - f(a_1, \dots, a_n)$ – полное приращение функции.

Теорема (необходимое условие дифференцируемости)

Если функция $f(x_1, \dots, x_n)$ дифференцируема в точке a , то в этой точке существуют все частные производные первого порядка, причем $A_1 = \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, A_n = \frac{\partial f}{\partial x_n}$.

Теорема (достаточное условие дифференцируемости)

Пусть в некоторой окрестности точки a существуют частные производные 1-ого порядка, которые непрерывны в самой точке a . Тогда функция $u = f(x_1, \dots, x_n)$ дифференцируема в точке a .

Теорема (о непрерывности)

Если функция $u = f(x_1, \dots, x_n)$ дифференцируема в точке a , то она непрерывна в ней.

Определение

Функция называется **непрерывно дифференцируемой** в точке a , если она имеет в этой точке непрерывные частные производные 1-ого порядка.